UYGULAMALAR

1- Bir dokuma ipliği saatte ortalama 0.375 defa kopmaktadır. 8 saat çalışma süresi içinde ipliğin kopma sayısı X t.d. ile ifade edilsin.

a.) X'in olasılık fonksiyonunu belirleyiniz.

b.) İpliğin çalışma süresi içinde en az 2, en çok 4 defa kopma olasılığı nedir.

c.) İpliğin çalışma süresi içinde en çok 2 defa kopma olasılığını hesaplayınız.

Çözüm: X, t.d. $\lambda = n.p = 8.(0.375) = 3$ (günde ortalama kopma sayısı) parametreli poisson dağılımı göstermektedir.

X: Çalışma süresi içinde ipliğin kopma sayısı olsun.

X: ipliğin kopma sayısı

a.)
$$p(X=x) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}.\lambda^{x}}{x!} , & x = 0,1,\dots \\ 0 , & d.h. \end{cases} \qquad e \cong 2{,}71$$

$$= \begin{cases} \dfrac{e^{-3}.3^{x}}{x!} , & x = 0,1,\dots \\ 0 , & d.h. \end{cases}$$

X'in olasılık fonksiyonu elde edilir.

b.)
$$p(2 \leq x \leq 4) = p(x=2) + p(x=3) + p(x=4)$$

$$= \frac{e^{-3}.3^{2}}{2!} + \frac{e^{-3}.3^{3}}{3!} + \frac{e^{-3}.3^{4}}{4!}$$

$$= 3^2.e^{-3}.\left(\frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{3^2}{4!}\right) = \frac{99}{8}.e^{-3} \cong 0{,}62$$

Çalışma süresi içinde ipin 2, 3 veya 4 defa kopma olasılığı 0,62'dir.

c.)
$$p(x \leq 2) = p(x=0) + p(x=1) + p(x=2)$$

$$= \frac{e^{-3}.3^{0}}{0!} + \frac{e^{-3}.3^{1}}{1!} + \frac{e^{-3}.3^{2}}{2!}$$

$$= e^{-3}\left(\frac{1}{0!} + \frac{3}{1!} + \frac{9}{2!}\right) = \frac{17}{2}.e^{-3} \cong 0.42,$$

İpliğin çalışma süresinde en çok 2 defa kopma olasılığı.

2. Bir telefon santralinde 2 dk. da 7 konuşma olmaktadır. Buna göre birim zamanda konuşma sayısının dağılımını belirleyip,

a.) 1 dk. içinde 1 konuşma olma olasılığını

b.) 1 dk. içinde en az 3 konuşma olma olasılığını

c.) Dağılımın $M_x(t) = ?$

Çözüm : X: 1 dk. (birim zaman) daki konuşma sayısı olsun.

$\lambda = \frac{7}{2} = 3.5$ birim zamandaki ortalama görüşme sayısı.

$$p(X=x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{7}{2}\right)^x \cdot e^{-\frac{7}{2}}}{x!} , & x = 0, 1, \dots \\ 0 , & d.h. \end{cases}$$

2 dk 7, 1 dk $\frac{7}{2}$, $\lambda = \frac{7}{2}$

a.) $p(X=1) = \dfrac{\left(\frac{7}{2}\right)^1 \cdot e^{-7/2}}{1!} = 0.106$ //

b.) $p(X \geq 3) = 1 - p(X < 3)$

$= 1 - [p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)]$

$= 1 - \left[\dfrac{e^{-\frac{7}{2}} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^0}{0!} + \dfrac{e^{-\frac{7}{2}} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^1}{1!} + \dfrac{e^{-\frac{7}{2}} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2}{2!}\right]$

$= 1 - 0{,}321 = 0{,}679$ //

c.) $M_x(t) = e^{\lambda \cdot (e^t - 1)}$

$= e^{\frac{7}{2} \cdot (e^t - 1)}$

3.) Bir ampul fabrikasının üretiminin %0.6 sının hatalı olduğu biliniyor. Bu fabrikanın üretiminden rastgele alınan 400 adetlik numunede en çok 3 tane hatalı ampul çıkma olasılığı?

Çözüm : X: Hatalı seçilen ampul sayısı olsun.

$p = 0{,}006$ Üretimin hatalı olma olasılığı bilmiyor.

$n = 400$ ampül seçiliyor.

Ortalama beklenen hatalı ampul sayısı

$\lambda = n.p = 400 \times 0{,}006 = 2.4$ olur.

$$f(x) = p(X = x) = \begin{cases} \dfrac{(2.4)^x . e^{-(2.4)}}{x!}, & x = 0, 1, \ldots \\ 0, & - \end{cases}$$

$$p(X \leq 3) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3)$$

$$= e^{-2{,}4}\left(\frac{(2.4)^0}{0!} + \frac{(2.4)^1}{1!} + \frac{(2.4)^2}{2!} + \frac{(2.4)^3}{3!}\right)$$

$$= 0{,}091 + 0{,}218 + 0{,}262 + 0{,}209 = 0{,}78$$

4-) $p(x;\lambda)$ poisson dağılımının bir olasılık dağılımı olduğunu gösteriniz.

<u>Çözüm</u>: $\sum_{x=0}^{\infty} p(x;\lambda) = 1$ olmalı,

$$\Rightarrow \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} . \lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} . \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} . e^{\lambda} = e^0 = 1$$

o halde poisson dağılımı bir o. f. dur.

5.) Bir fabrikada üretilen bir ürünün bozuk olma olasılığı 0.02 dir. 10.000 ürün gemiye yüklenmek için ambara konur. Bozuk ürünlerin, $E(x)$ ve σ_x'ini bulunuz.

$E(x) = n.p = 10.000 \times (0{,}02) = 200$ tane

$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{10.000 \times (0{,}02).(0.98)} = \sqrt{196} = 14$